Übungsklausur Geometrie 1 (U-Boote)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1 - 3x_3 = 6$.

a) Welche besondere Lage besitzt E?

b) Untersuche die gegenseitige Lage von g und E.
Bestimme gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts von g und E.

c) Gib die Gleichung der Parallelen p zu g durch den Punkt $P(2|1|9)$ an. (3VP)

2) Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|1)$, $B(-3|-3|4)$ und $C(3|-3|-2)$.
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C.

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.

(Teilergebnis: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$)

b) Zeichne die Ebene E in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

c) Zeige, dass das Dreieck, das man mit den drei Spurpunkten der Ebene erhält, gleichschenklig ist. (5VP)

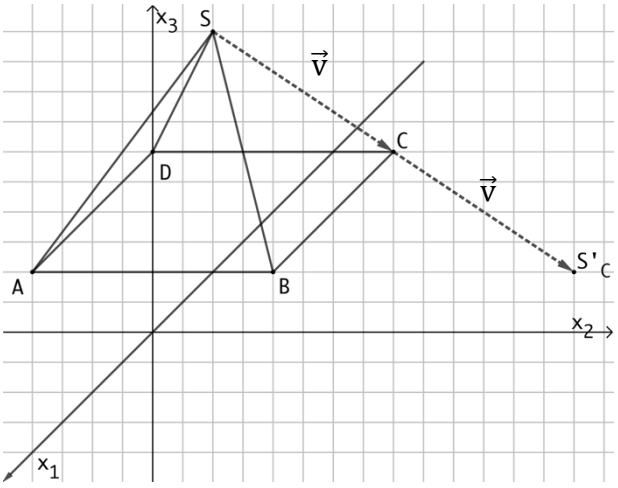
3) In der nebenstehenden quadratischen Pyramide sind die Koordinaten der Spitze $S(4|3|7)$ und der Punkte $A(6|1|4)$ und $C(2|5|4)$ gegeben.

a) Die Punkte A, B, C und D liegen alle in einer Ebene F, die parallel zur x_1x_2 – Ebene verläuft. Gib eine Gleichung der Ebene F an.

b) Gib die Koordinaten der Punkte B und D an.

c) Begründe, dass die Spitze S senkrecht über der Mitte des Quadrats ABCD liegt.

d) Beschreibe die in der Zeichnung dargestellte Vorgehensweise bzgl. des Punktes S'_C und bestimme die Koordinaten des Punktes S'_C.



(4VP)

4) Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S von g und h_1 .

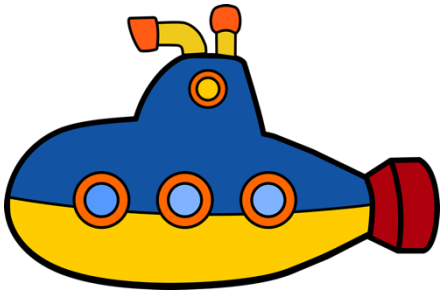
b) Bestimme nun allgemein die Lage der Geraden g zu jeder Geraden h_a. (3VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (U-Boote)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Aufgabe 1

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 – Ebene die Meeresoberfläche (1 LE entspricht 1m).

Zwei U-Boote U_1 und U_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.



Die Position von U_1 zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$$

(t in Minuten seit Beginn der Beobachtung).

U_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt $A(68\,|\,135\,|\,-68)$ und erreicht nach drei Minuten den Punkt $B(-202\,|\,-405\,|\,-248)$.

a) (1) Berechne, wie weit sich U_1 in einer Minute bewegt.

(2) Begründe, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche wegbewegt.

(3) Die Wassertiefe beträgt hier 800 Meter. Das U-Boot U_1 fährt mit konstanter Geschwindigkeit und in gleicher Richtung weiter.
Bestimme, nach wie vielen Minuten es den Meeresboden erreicht. (4VP)

b) (1) Berechne die Geschwindigkeit von U_2 in m/min.

(2) Begründe, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$$ (t in Minuten seit Beginn der Beobachtung). (4VP)

c) (1) Berechne den Abstand, den die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn haben.

(2) Kollidieren die U-Boote? (4VP)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 2$.

a) Bestimme a so, dass der Punkt $P(-2a \mid 3a^2 \mid 4a-6)$ in der Ebene E liegt.

b) Die Ebene F ist parallel zur x_1 – Achse und schneidet die x_2x_3 – Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene E. Bestimme eine Gleichung von F. (3VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (U-Boote)

Lösung Pflichtteil:

1) a) Kein x_2 in Ebenengleichung $\Rightarrow$ E ist parallel zur x_2-Achse. (0,5P)

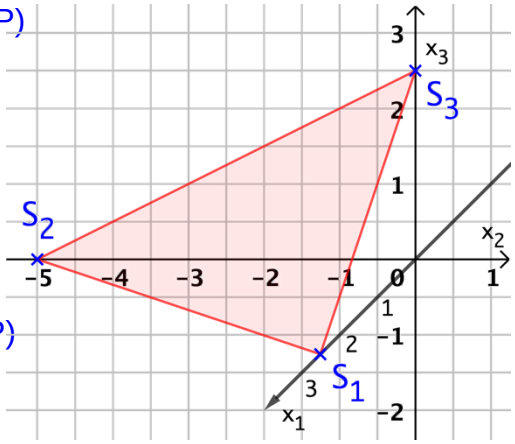
b) g in E: $3 + 2t - 3(-2 + t) = 6 \Leftrightarrow 9 - t = 6 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow S(9 \mid -2 \mid 1)$ (1,5P)
g und E schneiden sich im Punkt S.

c) p: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1P) **3P**

2) a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = b$, A in E: $2 + 1 + 2 = 5 = b \Rightarrow$ E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ (2P)

b) $S_1(2{,}5 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid -5 \mid 0)$, $S_3(0 \mid 0 \mid 2{,}5)$ (1,5P)



c) $|\overrightarrow{S_2S_1}| = \left|\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6{,}25 + 25} = \sqrt{31{,}25}$

$|\overrightarrow{S_2S_3}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25 + 6{,}25} = \sqrt{31{,}25}$

$\Rightarrow$ Das Dreieck $S_1S_2S_3$ ist gleichschenklig. (1,5P) **5P**

3) a) $x_3 = 4$ (0,5P)

b) B(6 I 5 I 4) und D (2 I 1 I 4) (1P)

c) M_{ABCD} (4 I 3 I 4), S (4 I 3 I 7) liegt 3 LE senkrecht über M_{ABCD} (1P)

d) S wird an C gespiegelt oder der Vektor $\vec{v}$ wird an C „gehängt“. (0,5P)

$\overrightarrow{0S'_C} = \overrightarrow{0C} + \vec{v} = \overrightarrow{0C} + \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S'_C\,(0 \mid 7 \mid 1)$ (1P) **4P**

4) a) Schnittpunkt? $\left.\begin{array}{rrcl} (\mathrm{I}) & 3 + s & = & 2 + t \\ (\mathrm{II}) & -7 - 4s & = & -3 + t \\ (\mathrm{III}) & 7 + 8s & = & -1 \end{array}\right\}$ $(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}): 10 + 5s = 5 \Leftrightarrow s = -1$ in $(\mathrm{I}): t = 0$

$s = -1$ in $(\mathrm{III}): 7 - 8 = -1$ √ $\Rightarrow S(2 \mid -3 \mid -1)$ (1,5P)

b) 1) Die Richtungsvektoren von g und h_a sind für jedes $a \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.
Daher windschief oder Schnittpunkt. (0,5P)

2) Wegen $S \in h_a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ haben g und h_a genau diesen Punkt gemeinsam.
g und h_a schneiden sich in S für jedes $a \in \mathbb{R}$. (1P) **3P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 1 (U-Boote)

Lösung Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) Weg in einer Minute: $s_1 = \left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right| = \sqrt{60^2+90^2+30^2} \approx 112{,}25$

Das U-Boot U_1 legt in einer Minute etwa 112 zurück. (1,5P)

(2) U_1 bewegt sich von der Meeresoberfläche weg,
da die x_3-Koordinate des RV negativ ist. (1P)

(3) Meeresboden B: $x_3 = -800$ (0,5P)
Schneiden von g mit B durch einsetzen:
$-170 - 30t = -800 \Leftrightarrow -30t = -630 \Leftrightarrow t = 21$
Nach 21 Minuten erreicht das U-Boot U_1 den Meeresboden. (1P) **4P**

b) (1) Geschwindigkeit von U_2 in m/min:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-270\\-540\\-180\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72900+291600+32400} = 630$ (1,5P)

630 m in 3 min $\Rightarrow$ 210 m in 1 min $\Rightarrow$ Geschwindigkeit von U_2: 210 m/min (0,5P)

(2) Position von U_2 zum Zeitpunkt t durch h, da:
1. Stützvektor entspricht dem Ortsvektor von A – Startpunkt.
2. RV $\begin{pmatrix}-90\\-180\\-60\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, da U_2 pro Minute 210 m in dieser Richtung zurückgelegt. (2P) **4P**

c) (1) U_1 zu Beobachtungsbeginn bei P(140|105|–170)
U_2 zu Beobachtungsbeginn bei A(68|135|–68)

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix}72\\-30\\-102\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5184+900+10404} = \sqrt{16488} \approx 128{,}4$

Die U-Boote sind zu Beobachtungsbeginn ca. 128,4 m voneinander entfernt. (2P)

(2) Schnittpunkt?

$140 - 60t = 68 - 90t \Leftrightarrow 30t = -72 \Leftrightarrow t = -2{,}4$
$105 - 90t = 135 - 180t \Leftrightarrow 90t = 30 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ Widerspruch!
$-170 - 30t = -68 - 60t \Leftrightarrow 30t = 102 \Leftrightarrow t = 3{,}4$

Die U-Boote kollidieren nicht! (2P) **4P**

Aufgabe 2

a) P in E: $2(-2a) + 3a^2 - (4a - 6) = 2 \Leftrightarrow -4a + 3a^2 - 4a + 6 = 2 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow a_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ und } a_2 = \frac{2}{3}$ (2P)

b) F: $x_2 - x_3 = 2$ (1P) **3P**

Summe: 15 Punkte